El paquete \listofanswers

Robert Ipanaqué

6 de noviembre de 2012

Resumen

Se presenta el paquete `listofanswers` el cual permite construir listas de respuestas a ejercicios de matemática en un documento LaTeX.

1. Introducción

Definir una lista personalizada de respuestas (similar a la tabla de contenidos, lista de figuras o lista de tablas) es un tema de interés para algunos usuarios de LaTeX que tienen la necesidad de elaborar un libro o simplemente una relación de ejercicios relacionados con diversos temas de matemática. Se presenta el paquete `listofanswers` el cual permite elaborar una lista de respuestas para un documento LaTeX acerca de matemática.

2. Funcionalidad

La figura (1) muestra una parte del preámbulo de un libro en el cual se invoca el paquete `listofanswers`.

La figura (2) muestra la forma de iniciar un grupo de ejercicios, así como la forma de ingresar el enunciado de un ejercicio con su respectiva respuesta. Note que se usa el comando `\exercise` en la forma:

`\exercise{<Enunciado>}{<Respuesta>}`

En la figura (3) se aprecian dos ejercicios, sin respuestas, que incluyen "subejercicios" con respuestas. Note que usa el comando `\exercise` en la forma:

`\exercise{<Enunciado>}`

y el comando `\subexercise` en la forma

`\subexercise{<Enunciado>}{<Respuesta>}`

En la figura (4) se aprecia un ejercicio cuya respuesta incluirá una sugerencia. Para ello se usa:

`\exercise*{<Enunciado>}{<Sugerencia>}`

Finalmente, la figura (5) muestra un ejercicio cuyo enunciado pide hacer una demostración. En este caso tampoco se incluye respuesta.

```
\documentclass[12pt,a4paper,openany]{book}
\usepackage[latin1]{inputenc}
\usepackage[spanish]{babel}
\usepackage{amsmath,amsfonts,amssymb}
\usepackage{graphicx}
\usepackage[left=4cm,right=3cm,top=4cm,bottom=3cm]{geometry}
\usepackage{wrapfig}
\usepackage{listofanswers}
```

Figura 1:

```
\group
\exercise{Exprese el área $S$ de un triángulo como una función de
longitudes de sus dos lados $x$ e $y$, si el perímetro del
triángulo es igual a $2p$. Halle el campo de definición de esta
función.}{$S=\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+p-1)}; 0<x<0, 0<y<p, x+y>p$.}
```

Inicio de grupo de ejercicios

Enunciado de ejercicio

Respuesta

Figura 2:

```
\exercise{Sean dadas las funciones: $f(x,y)=x^{2}+y^{2}$,
$\varphi(x,y)=x^{2}-y^{2}$. Halle:}
\subexercise{$f(\varphi(x,y),y^{2})$;}
{$x^{4}-2x^{2}y^{2}+2y^{4}$.}
\subexercise{$\varphi(f(x,y),\varphi(x,y))$.}{$4x^{2}y^{2}$.}

\exercise{Sean dadas las funciones: $f(x,y)=x^{2}-y^{2}$,
$\varphi(x)=\cos x$,\linebreak $\psi(x)=\sen x$. Halle:}
\subexercise{$f(\varphi(x),\psi(x))$;}{$\cos 2x$.}
\subexercise{$\varphi(f(x,y))$.}{$\cos(x^{2}-y^{2})$.}
```

Sin respuesta

Figura 3:

```
\exercise*{Muestre que para la funci\'{o}n
\[\begin{cases}
\frac{xy}{x^{2}+y^{2}}, & \hbox{si } x^{2}+y^{2}\neq 0\\
0, & \hbox{si } x=y=0
\end{cases}\]
tiene derivadas parciales $f^{\prime}_{x}(x,y)$ y $f^{\prime}_{y}(x,y)$
en el punto $(0,0)$, aunque es discontinua en este punto.}
{$f^{\prime}_{x}(0,0) = f^{\prime}_{y}(0,0) = 0$. \textsf{\bfseries Sug.}
Compruebe que la funci\'{o}n es nula en todos los puntos de los ejes $OX$
y $OY$ y use la definici\'{o}n de las derivadas parciales.}
```

Enunciado de ejercicio

Respuesta con sugerencia

Figura 4:

```
\exercise{Muestre que para la función $f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$ no
existe $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)$,
calculando lo límites reiterados
\[
\lim_{x\to 0}\left (\lim_{y\to 0}f(x,y)\right ),\quad \lim_{y\to
0}\left (\lim_{x\to 0}f(x,y)\right )\,.
\]}
```

Otro enunciado sin respuesta

Figura 5:

Cálculo en varias variables

Robert Ipanaqué Chero [1]

[1]Departamento Académico de Matemática, Universidad Nacional de Piura, PERÚ.

Índice general

Capítulo 1

Límites y continuidad

1.1. Función real de varias variables

Recordemos que todo juego ordenado de n números reales $x_1, \ldots, x_n$ se denota $(x_1, \ldots, x_n)$ o $P(x_1, \ldots, x_n)$ y se llama punto del espacio aritmético n-dimensional $\mathbb{R}^n$, y los números $(x_1, \ldots, x_n)$ llevan el nombre de coordenadas del punto $P = P(x_1, \ldots, x_n)$. La distancia entre los puntos $P(x_1, \ldots, x_n)$ y $P'(x'_1, \ldots, x'_n)$ se determina por la fórmula

$$d(P, P') = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + \ldots + (x_n - x'_n)^2}\,.$$

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto arbitrario de puntos de un espacio aritmético n-dimensional. Si a cada punto $P(x_1, \ldots, x_n) \in D$ se le ha puesto en correspondencia cierto número real bien determinado $f(P) = f(x_1, \ldots, x_n)$, se dice que sobre el conjunto D está definida la *función numérica* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de n variables $x_1, \ldots, x_n$. El conjunto D se denomina campo de definición (*dominio*), y el conjunto $E = \{u \in \mathbb{R} | \; u = f(P), \; P \in D\}$, campo de valores (*rango*) de la función $u = f(P)$.

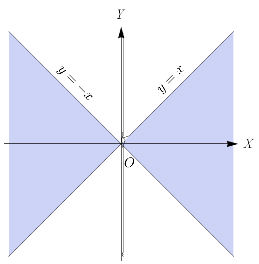

Figura 1.1:

En el caso particular de $n = 2$ la función de dos variables $z = f(x, y)$ puede considerarse como función de los puntos de un plano en el espacio geométrico tridimensional, provisto de un sistema fijo de coordenadas $OXYZ$. Se llama gráfica de dicha función el conjunto de puntos

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \; z = f(x, y)\}\,,$$

que representa, hablando en general, cierta superficie en $\mathbb{R}^3$.

EJERCICIOS. Grupo 1

1. Exprese el área S de un triángulo como una función de longitudes de sus dos lados x e y, si el perímetro del triángulo es igual a $2p$. Halle el campo de definición de esta función.

2. Exprese el volumen V de un cono circular como función del área S de su superficie lateral y de su longitud l de la generatriz. Halle el campo de definición de esta función.

3. Exprese el área S de un trapecio isósceles como una función de longitudes de sus lados, si x e y son las longitudes de la bases y z es la longitud del lado lateral. Halle el campo de definición de esta función.

Halle los campos de definición de las funciones de dos variables ($R =$ const):

4. $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. **5.** $z = \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$.

6. Sea dada una función $f(x, y) = \frac{2x - 3y}{3x - 2y}$. Halle $f(2, 1)$, $f(1, 2)$, $f(3, 2)$, $f(2, 3)$, $f(a, a)$, $f(a, -a)$.

7. Sea dada una función $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$. Halle $f(-3, 4)$ y $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$.

8. Sean dadas las funciones: $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\varphi(x, y) = x^2 - y^2$. Halle: 1 a) $f(\varphi(x, y), y^2)$; 1 b) $\varphi(f(x, y), \varphi(x, y))$.

9. Sean dadas las funciones: $f(x, y) = x^2 - y^2$, $\varphi(x) = \cos x$, $\psi(x) = \operatorname{sen} x$. Halle: 1 a) $f(\varphi(x), \psi(x))$; 1 b) $\varphi(f(x, y))$.

1.2. Límite y continuidad de la función

El número L se denomina *límite* de la función $u = f(P)$ cuando el punto $P(x_1, \ldots, x_n)$ tiende al punto $P_0(a_1, \ldots, a_n)$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe tal $\delta > 0$ que de la condición

$$0 < d(P, P_0) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2} < \delta$$

se deduce

$$|f(x_1, \ldots, x_n) - L| < \varepsilon\,.$$

En este caso se escribe:

$$L = \lim_{P \to P_0} f(P) = \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \cdots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, \ldots, x_n)\,.$$

Una función se llama *continua en el campo*, si es continua en cada punto de este campo. Si en el punto P_0 está perturbada por lo menos una de las condiciones de 1) a 3), P_0 se denominará punto de discontinuidad de la función $f(P)$. Los puntos de discontinuidad pueden ser asilados y pueden formar líneas de discontinuidad, superficies de discontinuidad, etc.

EJERCICIOS. Grupo 2

Halle los límites:
1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{3-\sqrt{xy+9}}$. **2.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{sen} xy}{xy}$. **3.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{sen} xy}{y}$.

4. Muestre que para la función $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ existen y son iguales entre sí los límites reiterados

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right), \quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right),$$

y, sin embargo, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ no existe.

5. Muestre que para la función $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ no existe $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$, calculando lo límites reiterados

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right), \quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right).$$

6. Muestre que en el punto $(0,0)$ las funciones que siguen más abajo son continuas respecto a cada una de las variables x e y, pero son discontinuas en la totalidad variables:

1 a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}, \text{ si } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, \text{ si } x=y=0; \end{cases}$

1 b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{(x+y)^3}, \text{ si } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, \text{ si } x=y=0. \end{cases}$

Halle los puntos de discontinuidad de las funciones de dos variables:
7. $z = \frac{1}{(x-1)^2+(y+1)^2}$. **8.** $z = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \pi x + \operatorname{sen}^2 \pi y}$.

Capítulo 2

Derivadas parciales

Sea $(x_1,\dots,x_k,\dots,x_n)$ un punto fijo arbitrario perteneciente al campo de definición de la función $u = f(x_1,\dots,x_n)$. Dando al valor de la variable x_k $(k=1,2,\dots,n)$ un incremento Δx_k, examinamos el límite

$$\lim_{\Delta x_k\to 0} \frac{f(x_1,\dots,x_k+\Delta x_k,\dots,x_n) - f(x_1,\dots,x_k,\dots,x_n)}{\Delta x_k}.$$

Este límite lleva el nombre de *derivada parcial* (*de primer orden*) de la función dada respecto de la variable x_k en el punto $(x_1,\dots,x_n)$ y se designa $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ ó $f'_{x_k}(x_1,\dots,x_n)$.

Las derivadas parciales se calculan según las reglas y fórmulas de derivación corrientes (considerando todas las variables a excepción de x_k, como magnitudes constantes).

La función $u = f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ se denomina *homogénea* de grado m, si para cualquier número real $t \neq 0$ se verifica la igualdad

$$f(tx_1,tx_2,\dots,tx_n) = t^m f(x_1,x_2,\dots,x_n).$$

Si una función homogénea $u = f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ se grado m tiene derivadas parciales respecto de cada una de las variables, se cumple la relación (*teorema de Euler*)

$$x_1 f'_{x_1}(x_1,x_2,\dots,x_n) + x_2 f'_{x_2}(x_1,x_2,\dots,x_n) + \dots \\ \dots + x_n f'_{x_n}(x_1,x_2,\dots,x_n) = m f(x_1,x_2,\dots,x_n).$$

Se llaman *derivadas parciales de segundo orden* de la función $u = f(x_1,x_2\dots,x_n)$ las derivadas parciales de sus derivadas parciales de primer orden. Las derivadas de segundo orden se designan del modo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f''_{x_k x_k}(x_1,x_2,\dots,x_k,\dots,x_n),$$
$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} = f''_{x_k x_i}(x_1,x_2,\dots,x_k,\dots,x_i,\dots,x_n), \text{ etc.}$$

De un modo análogo se determinan y se designan las derivadas parciales de orden superior al segundo.

El resultado de la derivación múltiple de una función respecto a las diferentes variables no depende de la sucesión en que se realiza la derivación, siempre que las derivadas parciales "mixtas" que aparecen en este caso sean continuas.

EJERCICIOS. Grupo 3

Halle las derivadas parciales de primer y segundo órdenes de las funciones dadas:

1. $z = x^5 + y^5 - 5x^3y^3$. **2.** $z = xy + \frac{y}{x}$. **3.** $z = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

4. $z = xe^{-xy}$. **5.** $z = \frac{\cos y^2}{x}$. **6.** $z = y^x$.

7*. Muestre que para la función

$$\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$$

tiene derivadas parciales $f'_x(x,y)$ y $f'_y(x,y)$ en el punto $(0,0)$, aunque es discontinua en este punto.

8. Halle $f'_x(3,2)$, $f'_y(3,2)$, $f''_{xx}(3,2)$, $f''_{xy}(3,2)$, $f''_{yy}(3,2)$, si $f(x,y) = x^3y + xy^2 - 2x + 3y - 1$.

9. Halle $f'''_{xxx}(0,1)$, $f'''_{xxy}(0,1)$, $f'''_{xyy}(0,1)$, $f'''_{yyy}(0,1)$, si $f(x,y) = e^{x^2y}$.

Respuestas

Grupo 1, p. 5

1. $S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+p-1)}; 0 < x < 0, 0 < y < p, x+y > p$. **2.** $V = \frac{S^2}{3\pi^2l^3}\sqrt{\pi^2l^4 - S^2}; 0 < S < \pi l^2$. **3.** $S = \frac{x+y}{4}\sqrt{4z^2-(x-y)^2}$; $z > \frac{x-y}{2}$. **4.** $x^2+y^2 < R^2$. **5.** $x^2+y^2 > R^2$. **6.** $f(2,1) = 1/4$; $f(1,2) = 4$; $f(3,2) = 0$; $f(2,3) = \infty$; $f(a,a) = 1$. **7.** $f(-3,4) = -24/25$; $f(1,y/x) = f(x,y)$. **8.** a) $x^4 - 2x^2y^2 + 2y^4$. **8.** b) $4x^2y^2$. **9.** a) $\cos 2x$. **9.** b) $\cos(x^2-y^2)$.

Grupo 2, p. 6

1. -6. **2.** 1. **3.** 0. **7.** $(1,-1)$. **8.** (m,n), donde $m, n \in \mathbb{Z}$.

Grupo 3, p. 8

1. $\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 - 15x^2y^3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 5y^4 - 15x^3y^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 20x^3 - 30xy^3$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -45x^2y^2$, $\frac{\partial^z}{\partial y^2} = 20y^3 - 30x^3y$. **2.** $\frac{\partial z}{\partial x} = y - \frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x + \frac{1}{x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1 - \frac{1}{x^2}$, $\frac{\partial^z}{\partial y^2} = 0$. **3.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{3xy^3}{(x^2+y^2)^{5/2}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{3x^2y^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}$, $\frac{\partial^z}{\partial y^2} = -\frac{3x^3y}{(x^2+y^2)^{5/2}}$. **4.** $\frac{\partial z}{\partial x} = (1-xy)e^{-xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -x^2e^{-xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y(xy-2)e^{-xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x(xy-2)e^{-xy}$, $\frac{\partial^z}{\partial y^2} = x^3e^{-xy}$. **5.** $\frac{\partial z}{\partial x} =$, $\frac{\partial z}{\partial y} =$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$, $\frac{\partial^z}{\partial y^2} =$. **6.** $\frac{\partial z}{\partial x} = y^x \ln y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = xy^{x-1}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^x \ln^2 y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = y^{x-1}(x \ln y + 1)$, $\frac{\partial^z}{\partial y^2} = x(x-1)y^{x-2} (y > 0)$. **7.** $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$. **Sug.** Compruebe que la función es nula en todos los puntos de los ejes OX y OY y use la definición de las derivadas parciales. **8.** $f'_x(3,2) = 56$, $f'_y(3,2) = 42$, $f''_{xx}(3,2) = 36$, $f''_{xy}(3,2) = 31$, $f''_{yy}(3,2) = 6$. **9.** $f'''_{xxx}(0,1) = 0$, $f'''_{xxy}(0,1) = 2$, $f'''_{xyy}(0,1) = 0$, $f'''_{yyy}(0,1) = 0$.

3. Otros idiomas

Para adaptar los encabezados a otro idioma (el inglés, por ejemplo) use el siguiente código en el preámbulo:

```
\renewcommand{\answersname}{Answers}
\renewcommand{\exercisesname}{EXERCISES}
\renewcommand{\groupname}{Group}
```

4. Problemas con algunos comandos

Para evitar los problemas que se presentan con algunos comandos[1] use el comando `\protect`, como en los siguientes ejemplos:

Problema con `\substack`

```
\exercise{
Halle $\left .\frac{dy}{dx}\right \vert_{\substack{x=1\\y=1}}$,
$\left .\frac{d^{2}y}{dx^{2}}\right \vert_{\substack{x=1\\y=1}}$,
$\left .\frac{d^{3}y}{dx^{3}}\right \vert_{\substack{x=1\\y=1}}$,
si $x^{2}+2xy+y^{2}-4x+2y-2=0$
}
{
$\left .\frac{dy}{dx}\right \vert_{\protect\substack{x=1\\y=1}}=0$,
$\left .\frac{d^{2}y}{dx^{2}}\right \vert_{\protect\substack{x=1\\y=1}}
=-\frac{1}{3}$, $\left .\frac{d^{3}y}{dx^{3}}
\right \vert_{\protect\substack{x=1\\y=1}}=\frac{1}{3}$.
}
```

Problema con `\linebreak`

```
\exercise{
$z=\frac{1}{\sen x\sen y}$.
}
{
Las líneas de discontinuidad son las rectas $x=k\pi$ e $y=m\pi$,
donde\protect\linebreak $k,m\in\mathbb{Z}$.
}
```

Problema con `\footnote`

```
\exercise{
Halle todas las derivadas parciales de segundo orden de la función
$u=f(x,xy,xyz)$.
}
{
```

[1] Estos problemas se presentan al digitar la respuesta.

```
$\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}} = f^{\prime\prime}_{11} +
y^{2}f^{\prime\prime}_{22} + y^{2}z^{2}f^{\prime\prime}_{33} +
2yf^{\prime\prime}_{12} + 2yzf^{\prime\prime}_{13} +
2y^{2}zf^{\prime\prime}_{23}$, $\frac{\partial^{2}u}{\partial y^{2}} =
x^{2}f^{\prime\prime}_{22} + 2x^{2}zf^{\prime\prime}_{23} +
x^{2}z^{2}f^{\prime\prime}_{33}$,
$\frac{\partial^{2}u}{\partial z^{2}} = x^{2}y^{2}f^{\prime\prime}_{33}$,
$\frac{\partial^{2}u}{\partial x\partial y} = xyf^{\prime\prime}_{22} +
xyz^{2}f^{\prime\prime}_{33} + xf^{\prime\prime}_{12} +
xzf^{\prime\prime}_{13} + 2xyzf^{\prime\prime}_{23} + f^{\prime}_{2} +
zf^{\prime}_{3}$, $\frac{\partial^{2}u}{\partial x\partial z} =
xyf^{\prime\prime}_{13} + xy^{2}f^{\prime\prime}_{23} +
xy^{2}zf^{\prime\prime}_{33} + yf^{\prime}_{3}$,
$\frac{\partial^{2}u}{\partial y\partial z} =
x^{2}yf^{\prime\prime}_{23} + x^{2}yzf^{\prime\prime}_{33} +
xf^{\prime}_{3}$\protect\footnote{En las respuestas a los problemas
$21$ y $25$ mediante $f^{\prime}_{i}$ y $f^{\prime\prime}_{ij}$ están
designadas las derivadas parciales de la función
$f(\varphi_{1}(x,y,z),\varphi_{2}(x,y,z),\varphi_{3}(x,y,z))$
respecto a las variables $\varphi_{i}$ ó $\varphi_{i}$ y $\varphi_{j}$.}.}
```

5. El paquete `hyperref`

Se recomienda usar el paquete `hyperref` en una forma parecida a

```
\usepackage{hyperref}
\hypersetup{pdfborder=0 0 0,linktocpage=true,colorlinks=true}
```